



TÜBİTAK

TÜRKİYE BİLİMSEL VE TEKNOLOJİK ARAŞTIRMA KURUMU
BİLİM İNSANI DESTEKLEME DAİRE BAŞKANLIĞI

14. ULUSAL MATEMATİK OLİMPİYATI - 2006
BİRİNCİ AŞAMA SINAVI

Soru kitapçığı türü

A

7 Mayıs 2006 Pazar, 13.00-15.30

SINAVLA İLGİLİ UYARILAR:

- Bu sınav çoktan seçmeli 36 adet sorudan oluşmaktadır.
- Cevap kâğıdınıza size verilen soru kitapçığının türünü gösteren harfi işaretlemeyi unutmayınız.
- Her sorunun sadece bir cevabı vardır. Doğru cevabınızı, cevap kâğıdınızdaki ilgili kutucuğu tamamen karalayarak işaretleyiniz.
- **Her soru eşit değerde olup, dört yanlış cevap bir doğru cevabı götürecektir.**
- Sınavda herhangi bir yardımcı materyal ya da karalama kâğıdı kullanılması yasaktır. Soru kitapçığındaki boşlukları karalama için kullanabilirsiniz.
- Sınav süresince görevlilerle konuşulması ve soru sorulması, öğrencilerin birbirlerinden kalem, silgi vb. şeyler istemeleri yasaktır.
- Sorularda bir yanlışın olması düşük bir olasılıktır. Böyle bir şeyin olması durumunda sınav akademik kurulu gerekeni yapacaktır. Bu durumda size düşen, en doğru olduğuna karar verdiğiniz seçeneği işaretlemenizdir.
- Sınav sırasında kopya çeken, çekmeye teşebbüs eden ve kopya verenlerin kimlikleri sınav tutanağına yazılacak ve bu kişilerin sınavları geçersiz sayılacaktır.
- Sınav başladıktan sonraki ilk yarım saat içinde sınav salonundan ayrılmak yasaktır.
- Sınav süresince resimli bir kimlik belgesini masanızın üzerinde bulundurunuz.
- Sınav salonundan ayrılmadan önce cevap kâğıdınızı görevlilere teslim etmeyi unutmayınız.

BAŞARILAR DİLERİZ.

NOT: Metin içinde kullanılan bazı gösterimlerin anlamları aşağıda verilmiştir.

AB	A ve B noktalarından geçen doğru
$[AB]$	A ve B noktalarını birleştiren doğru parçası
\overline{AB}	A noktasından çıkıp B noktasından geçen ışın
$ AB $	$[AB]$ nın uzunluğu
$m(\widehat{ABC})$	ABC açısının ölçüsü
$m(\widehat{A})$	A açısının ölçüsü
$\llbracket x \rrbracket$	x gerçel sayısını aşmayan en büyük tam sayı

1. Bir ABC eşkenar üçgeninde $[AB]$ ve $[AC]$ kenarlarının orta noktaları sırasıyla D ve E ; $[DE]$ ışımının çevrel çemberi kestiği nokta da F olmak üzere, $\frac{|DE|}{|DF|}$ nedir?

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ c) $\frac{2}{3}(\sqrt{3} - 1)$ d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$

2. p ve $p^2 + 2$ asal sayılarsa, $p^3 + 3$ sayısının en çok kaç asal böleni olabilir?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

3. $a_1 = -1$, $a_2 = 2$ ve $n \geq 3$ için, $a_n = \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}$ ise, a_{2006} kaçtır?

a) -2 b) -1 c) $-\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{2}$ e) 2

4. Kenar uzunlukları 1 olan 27 tane küpten her birinde, iki karşılıklı yüz birer nokta, başka iki karşılıklı yüz ikişer nokta, geri kalan iki karşılıklı yüz de üçer nokta ile işaretleniyor. Bu 27 küp ile $3 \times 3 \times 3$ boyutlarında bir küp oluşturursak, bu küpün yüzleri üstünde işaretlenmiş toplam nokta sayısı en az kaç olabilir?

a) 54 b) 60 c) 72 d) 90 e) 96

5. Bir ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı üstünde $|AB| + |BD| = |AC|$ ve $m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{DAC}) = 30^\circ$ olacak biçimde bir D noktası bulunuyorsa, $m(\widehat{ACB})$ nedir?

- a) 30° b) 40° c) 45° d) 48° e) 50°

6. $3 + 3^2 + 3^{2^2} + 3^{2^3} + \dots + 3^{2^{2006}}$ toplamı, 11 moduna göre aşağıdakilerden hangisine denktir?

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 5 e) 10

7. $\left[\left[\frac{m}{11} \right] \right] = \left[\left[\frac{m}{10} \right] \right]$ eşitliğini sağlayan kaç pozitif tam sayı vardır?

- a) 44 b) 48 c) 52 d) 54 e) 56

8. d_1 ve d_2 bir düzlem üzerinde birbirine paralel iki farklı doğru olmak üzere, d_1 üstünde 11 siyah nokta, d_2 üstünde de 16 beyaz nokta işaretleniyor. Siyah ve beyaz noktaları birleştiren doğru parçalarının, d_1 ve d_2 doğruları arasındaki şeridin iç bölgesinde bulunan kesişim noktalarının sayısı en çok kaçtır?

- a) 5600 b) 5650 c) 6500 d) 6560 e) 6600

9. Kenar uzunlukları $|AB| = 6$, $|BC| = 7$ ve $|AC| = 8$ olan bir ABC üçgeninin A köşesine ait iç açıortay BC yi D noktasında kesiyor. E noktası $[AC]$ üstünde olmak üzere $|CE| = 2$ ise, $|DE|$ kaçtır?

- a) 3 b) $\frac{17}{5}$ c) $\frac{7}{2}$ d) $2\sqrt{3}$ e) $3\sqrt{2}$

10. 5^n nin $\frac{2006!}{(1003!)^2}$ sayısını bölmesini sağlayan en büyük n tam sayısı kaçtır?

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 500

11. $4x^4 - 3x^2 + 7x - 3 = 0$ denkleminin farklı gerçel köklerinin toplamı kaçtır?

- a) -1 b) -2 c) -3 d) -4 e) Hiçbiri

12. $\{1, 2, \dots, 2006\}$ kümesi, boş olmayan ve hiçbiri ardışık herhangi iki sayı içermeyen üç kümeye kaç değişik biçimde ayrılabilir?

- a) $3^{2006} - 3 \cdot 2^{2006} + 1$ b) $2^{2005} - 2$ c) 3^{2004} d) $3^{2005} - 1$ e) Hiçbiri

13. $|AB| = |AC|$ olan ikizkenar bir ABC üçgeninin $[AB]$ kenarı üstünde alınan bir D noktasından BC ye çizilen paralel AC yi E noktasında kesiyor. $m(\widehat{A}) = 20^\circ$, $|DE| = 1$, $|BC| = a$ ve $|BE| = a + 1$ ise, $|AB|$ aşağıdakilerden hangisidir?

- a) $2a$ b) $a^2 - a$ c) $a^2 + 1$ d) $(a + 1)^2$ e) $a^2 + a$

14. $A, B \in \{1, 2, \dots, 9\}$ olmak üzere, on tabanındaki yazılımı $AABB$ şeklinde olan sayılardan kaç tanesi tam karedir?

- a) 3 b) 2 c) 1 d) 0 e) Hiçbiri

15. $x^2 - 5x - 4\sqrt{x} + 13 = 0$ denkleminin kaç farklı gerçel kökü vardır?

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

16. $x_1 + x_2 + \dots + x_{13} \leq 2006$ eşitsizliğini sağlayan kaç $(x_1, x_2, \dots, x_{13})$ pozitif tam sayı on üçlüsü vardır?

- a) $\frac{2006!}{13! 1993!}$ b) $\frac{2006!}{14! 1992!}$ c) $\frac{1993!}{12! 1981!}$ d) $\frac{1993!}{13! 1980!}$ e) Hiçbiri

17. Bir ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı üstünde $|BD| = 2, |DC| = 6$ olacak şekilde bir D noktası bulunmaktadır. $|AB| = 4$ ve $m(\widehat{ACB}) = 20^\circ$ olduğuna göre, $m(\widehat{BAD})$ nedir?

- a) 10° b) 18° c) 20° d) 22° e) 25°

18. $S = \{n : n3^n + (2n + 1)5^n \equiv 0 \pmod{7}\}$ ise, her $n \in S$ için, $n + k \in S$ olmasını sağlayan en küçük pozitif k tam sayısı nedir?

- a) 6 b) 7 c) 14 d) 21 e) 42

19. $x^4 + y^4 + z^4 + 1 = 4xyz$ eşitliğini sağlayan kaç (x, y, z) gerçel sayı üçlüsü vardır?

- a) 0 b) 4 c) 6 d) 10 e) Sonsuz çoklukta

20. Bir kareyi k tane kareye ayırabiliyorsak, k tam sayısına *iyi sayı* diyelim. 2006 dan büyük olmayan kaç iyi sayı vardır?

- a) 1003 b) 1026 c) 2000 d) 2003 e) 2004

25. Kenar uzunlukları $|AB| = 7$, $|BC| = 6$ ve $|AC| = 5$ olan bir ABC üçgeninde $[BC]$ nin orta noktası E dir. A köşesinden çizilen iç açıortaya E den inilen dikmenin AB yi kestiği nokta D ise, $|AD|$ nedir?

- a) 5 b) 6 c) $\frac{9}{2}$ d) $3\sqrt{2}$ e) Hiçbiri

26. Kaç p asal sayısı için, $m^3 + 3m - 2 \equiv 0 \pmod{p}$ ve $m^2 + 4m + 5 \equiv 0 \pmod{p}$ koşullarını sağlayan bir m tam sayısı bulunur?

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) Sonsuz çoklukta

27. x, y, z pozitif gerçel sayıları $xy + yz + zx = 5$ koşulunu sağlıyorsa, $x^2 + y^2 + z^2 - xyz$ ifadesi aşağıdaki değerlerden hangisini alamaz?

- a) 3 b) 4 c) 5 d) $3\sqrt{3}$ e) Hiçbiri

28. 10 şekeri olan Ali, her gün en az bir şeker yiyorsa, şekerlerinin tümünü günlere dağılımı itibariyle kaç değişik biçimde yiyebilir?

- a) 64 b) 126 c) 243 d) 512 e) 1025

29. Bir ABC üçgeninde içteğet çemberinin merkezi I ; $[BC]$ ye değen dış teğet çemberinin merkezi J olmak üzere, $m(\widehat{B}) = 45^\circ$, $m(\widehat{A}) = 120^\circ$ ve $|IJ| = \sqrt{3}$ ise, $|BC|$ kaçtır?

- a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ e) $\sqrt{3} - 1$

30. $0 \leq x < 13, 0 \leq y < 13, 0 \leq z < 13$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}x - yz^2 &\equiv 1 \pmod{13} \\xz + y &\equiv 4 \pmod{13}\end{aligned}$$

denklik sistemini sağlayan kaç (x, y, z) tam sayı üçlüsü vardır?

- a) 10 b) 23 c) 36 d) 49 e) Hiçbiri

31. a, b, c pozitif gerçel sayılar olmak üzere, $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ polinomu $P(1) \geq 2$ ve $P(3) \leq 31$ koşullarını sağlıyorsa, $P(4)$ ün alabileceği kaç tam sayı değeri vardır?

- a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) Hiçbiri

32. “ $\{1, 2, \dots, 9\}$ kümesinin 5 elemanlı hangi 6 altkümesini alırsak alalım, bunlardan en az bir ortak elemana sahip k tanesi bulunur” önermesinin doğru olmasını sağlayan en büyük k tam sayısı nedir?

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

- 33.** Bir dışbükey $ABCD$ dörtgeninde $m(\widehat{ABD}) = 40^\circ, m(\widehat{DBC}) = 70^\circ, m(\widehat{BDA}) = 80^\circ$ ve $m(\widehat{BDC}) = 50^\circ$ ise, $m(\widehat{CAD})$ nedir?
- a) 25° b) 30° c) 35° d) 38° e) 40°
- 34.** 1000 den küçük olan ve 2 veya daha fazla ardışık pozitif tam sayının toplamı olarak yazılamayan kaç pozitif tam sayı vardır?
- a) 6 b) 10 c) 26 d) 68 e) 72
- 35.** a, b, c gerçel sayılar olmak üzere, $P(x) = ax^2 + bx + c$ polinomunun farklı gerçel köklerinin sayısı 1, $P(P(P(x)))$ polinomunun farklı gerçel köklerinin sayısı da 3 ise, abc ifadesinin alabileceği en küçük değer kaçtır?
- a) -3 b) -2 c) $2\sqrt{3}$ d) $3\sqrt{3}$ e) Hiçbiri
- 36.** n pozitif bir tam sayı olmak üzere, n sorudan oluşan bir sınavda, her soru en az bir öğrenci tarafından doğru yanıtlanıyor. Ayrıca hem her öğrenci çift sayıda soruyu doğru yanıtlıyor, hem de herhangi iki öğrenci için, her ikisinin de doğru yanıtladığı ortak soru sayısının çift olduğu gözleniyor. n nin alamayacağı değerlerin sayısı nedir?
- a) 3 b) 4 c) 5 d) Sonsuz çoklukta e) Hiçbiri